INSTITUCIÒN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL
“NUESTRA SEÑORA DEL CARMEN”
LENGUAZAQUE CUNDINAMARCA

BANCO DE TALLER N°6	
ASIGNATURA: Trigonometría	DOCENTES: MARCO EMIGDIO MOZO FONSECA
GRADO: DÉCIMO	PERIODO: PRIMERO
DESEMPEÑO: Determina los valores de las razones y las líneas trigonométricas de los principales ángulos a partir de la circunferencia unitaria.	
• EJE TEMATICO: Circunferencia unitaria, definición de las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria y líneas trigonométricas.	
OBSERVACIONES DEL ÁREA: Asegurarse de que el archivo esté bien marcado con el nombre, el grado y el # del taller, y haya cargado correctamente antes de enviarlo.	

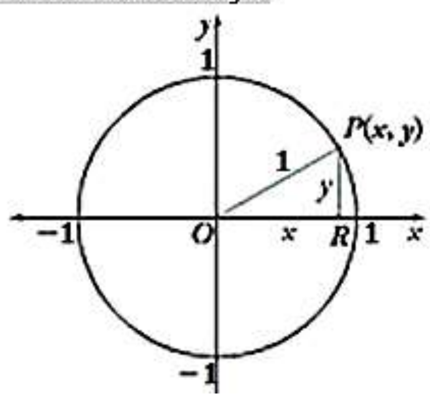
REFERENTE TEÓRICO

Las **funciones trigonométricas** se pueden estudiar de dos formas: a partir de las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo o a partir de la circunferencia unitaria como funciones de números reales.

Circunferencia unitaria

La **circunferencia unitaria** es el conjunto de puntos que se encuentran a una misma distancia (radio) de una unidad y su centro está en el origen.

En la siguiente figura, se muestra una circunferencia unitaria. El punto P pertenece a la circunferencia y las coordenadas (x, y) corresponden a las medidas de los catetos del triángulo rectángulo ORP. Si se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo ORP se tiene que $x^2 + y^2 = 1$. Por tanto, la ecuación de la circunferencia unitaria es: $\boxed{x^2 + y^2 = 1}$



Ejemplos:

1. Comprobar que el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ pertenece a la circunferencia unitaria. Luego, determina en qué cuadrante se ubica.

Primero, se tiene que $\boldsymbol{x = \frac{3}{5}}$ y $\boldsymbol{y = \frac{4}{5}}$.

Luego, se remplazan estos valores en la ecuación de la circunferencia unitaria y se resuelve así:

$x^2 + y^2 = 1$	Ecuanción de la circunferencia.
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$	Se remplazan las cordenadas del punto.
$\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$	Se resuelven las potencias.
$\frac{25}{25} = 1$	Se efectúa la suma.
$1 = 1$	Se divide.

Finalmente, se tiene que el punto pertenece a la circunferencia unitaria porque la igualdad se cumple. Como el signo de ambas coordenadas es positivo entonces el punto está ubicado en el primer cuadrante.

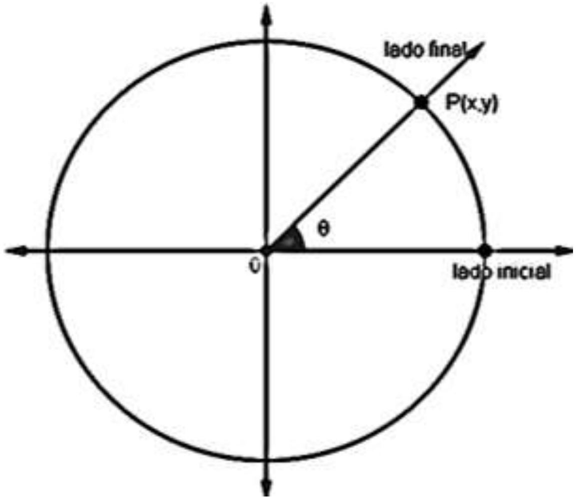
2. Hallar la coordenada y del punto $\left(-\frac{1}{2}, y\right)$, que pertenece a la circunferencia unitaria y está ubicado en el segundo cuadrante.

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$.	Se remplazan las coordenadas en la ecuación de la circunferencia unitaria.
$\frac{1}{4} + y^2 = 1$	Se resuelve la potencia.
$y^2 = 1 - \frac{1}{4}$	Se resta $\frac{1}{4}$ en ambos lados de la igualdad.
$y^2 = \frac{3}{4}$	Se efectúa la resta.
$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	Se extra la raíz cuadrada en ambos miembros.
$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$	La ordenada en el segundo cuadrante es positiva.

Por lo tanto, el punto es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

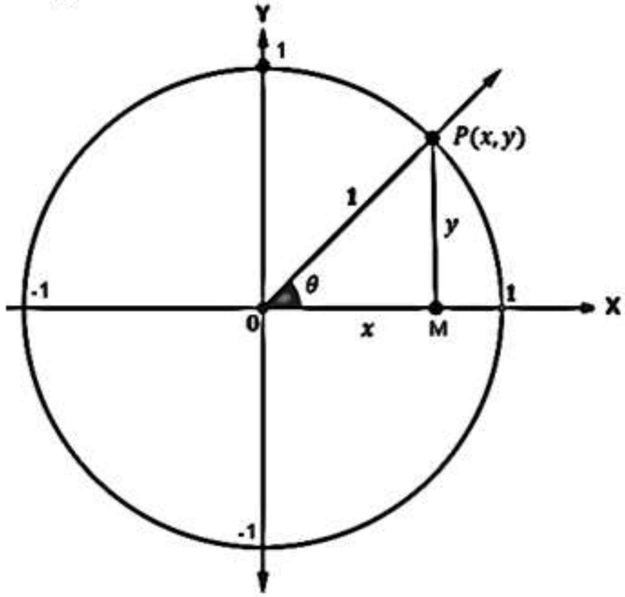
Recordemos:

Se dice que un ángulo θ es un **ángulo en posición normal** si su vértice coincide con el origen del plano cartesiano y su lado inicial está sobre el semieje positivo de las abscisas.



Definición de las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria

En la siguiente figura se observa que el ángulo θ está en posición normal en el primer cuadrante y que su lado terminal corta la circunferencia unitaria en el punto $P(x,y)$. La proyección P sobre el eje de las abscisas forma el triángulo rectángulo OMP. Como la hipotenusa $\overline{OP}$ del triángulo ΔOMP mide 1, se determinan las **razones trigonométricas** del triángulo rectángulo.



Note que con un punto $P(x,y)$ de la circunferencia unitaria siempre se puede construir un triángulo rectángulo con hipotenusa igual a 1, es por ello por lo que podemos definir las funciones seno, coseno y tangente a partir de ésta.

- Sea θ un ángulo en posición normal y $P(x,y)$ un punto de lado terminal, si $\boldsymbol{r=1}$ entonces, entonces las razones trigonométricas para este ángulo se definen de la siguiente manera:

$$sen\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y, \quad entonces \quad \boldsymbol{sen\ \theta = y}$$

$$cos\ \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x, \quad entonces \quad \boldsymbol{cos\ \theta = x}$$

$$tan\ \theta = \frac{y}{x}, \quad entonces \quad \boldsymbol{tan\ \theta = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta}}$$

$$cot\ \theta = \frac{x}{y}, \quad entonces \quad \boldsymbol{cot\ \theta = \frac{cos\ \theta}{sen\ \theta}}$$

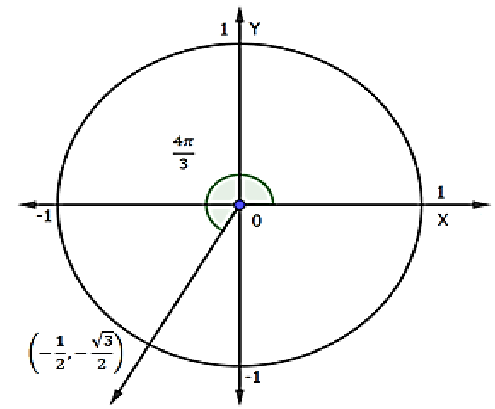
$$sec\ \theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{x}, \quad entonces \quad \boldsymbol{sec\ \theta = \frac{1}{cos\ \theta}}$$

$$cosec\ \theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{y}, \quad entonces \quad \boldsymbol{cosec\ \theta = \frac{1}{sen\ \theta}}$$

Ejemplo:

La figura siguiente muestra el ángulo $\theta = \frac{4\pi}{3}\ rad$ de la circunferencia unitaria.

- Determina las razones trigonométricas para dicho ángulo.



El lado terminal del ángulo $\theta = \frac{4\pi}{3}\ rad$ determina el punto $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ de la circunferencia unitaria. Por lo tanto:

$$sen\ \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad cos\ \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad tan\ \frac{4\pi}{3} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$cot\ \frac{4\pi}{3} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad sec\ \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \quad cosec\ \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Definición de las razones trigonométricas de un radio cualquiera

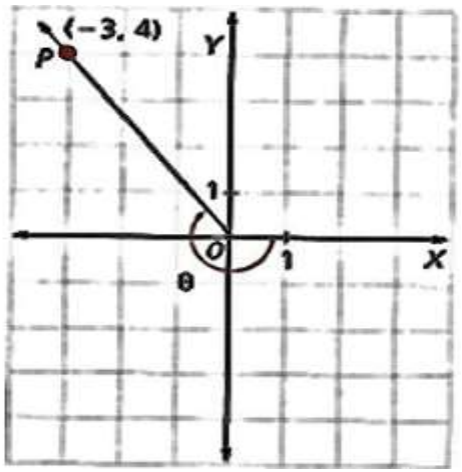
Sea θ un ángulo en posición normal y $P(x, y)$ un punto de lado terminal, si $r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces, entonces las razones trigonométricas para el ángulo θ de un radio cualquiera se definen como:

$$sen\ \theta = \frac{y}{r} \qquad cos\ \theta = \frac{x}{r} \qquad tan\ \theta = \frac{y}{x}, con\ x \neq 0$$

$$cot\ \theta = \frac{x}{y} \qquad sec\ \theta = \frac{r}{x} \qquad cosec\ \theta = \frac{r}{y}, con\ x \neq 0$$

Ejemplo

En la figura siguiente, se observa un ángulo negativo θ en posición normal cuyo lado terminal pasa por el punto $P(-3,4)$.



Como en este caso, $x = -3$ y $y = 4$, entonces:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16 =} \sqrt{25} = 5.$$

De modo que:

$$sen\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \qquad cos\ \theta = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5} \qquad tan\ \theta = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$cot\ \theta = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4} \qquad sec\ \theta = \frac{r}{x} = -\frac{5}{3} \qquad cosec\ \theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4}$$

Signo de una función trigonométrica

De la definición de las funciones seno y coseno, podemos conocer la distribución de signos de éstas en el plano:

Si $0 < \theta < 90$ (I cuadrante), entonces $\cos(\theta) > 0$ y $sen\ (\theta) > 0$,
Si $90 < \theta < 180$ (II cuadrante), entonces $\cos(\theta) < 0$ y $sen\ (\theta) > 0$,
Si $180 < \theta < 270$ (III cuadrante), entonces $\cos(\theta) < 0$ y $sen\ (\theta) < 0$,
Si $0 < \theta < 90$ (IV cuadrante), entonces $\cos(\theta) > 0$ y $sen\ (\theta) < 0$

Para conocer el signo de las funciones tangente, secante, cosecante y cotangente de un ángulo θ, en cualquiera de los cuatro cuadrantes, usamos su definición.

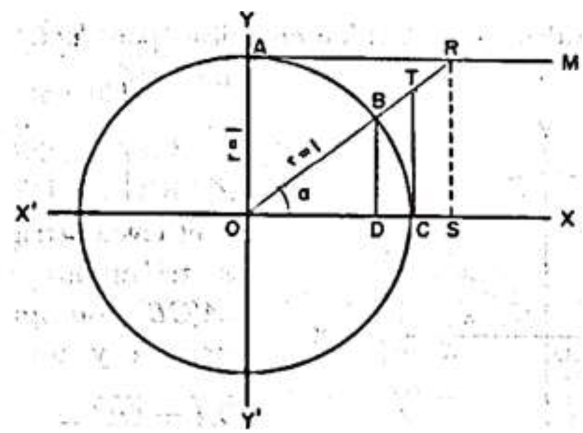
Si tenemos en cuenta el signo de las funciones seno y coseno en cada cuadrante y utilizamos la regla de los signos para la división, obtenemos la distribución de signos de las funciones tangente, secante, cosecante y cotangente:

En la siguiente tabla se puede apreciar la distribución de signos de las funciones trigonométricas dependiendo del cuadrante en el cual se encuentren.

Función\cuadrante	I	II	III	IV
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-
Cotangente	+	-	+	-
Secante	+	-	-	+
Cosecante	+	+	-	-

Líneas trigonométricas

Las **líneas trigonométricas** de un ángulo α en posición normal son los segmentos de recta cuyas medidas coinciden con cada una de las funciones trigonométricas para dicho ángulo.



Apliquemos las definiciones ya dadas de las funciones trigonométricas, tenemos:

$$\boldsymbol{sen\ \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BD}}{r} = \frac{\overline{BD}}{1} = \overline{BD}}$$

$$\cos\ a = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OD}}{\mathbf{r}} = \frac{\overline{OD}}{1} = \overline{OD}.$$

$$\tan\ a = \frac{\overline{BD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{TC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{TC}}{\mathbf{r}} = \frac{\overline{TC}}{1} = \overline{TC}.$$

$$\cot\ a = \frac{\overline{OD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AR}}{\mathbf{r}} = \frac{\overline{AR}}{1} = \overline{AR}.$$

$$\sec\ a = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OT}}{\mathbf{r}} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}.$$

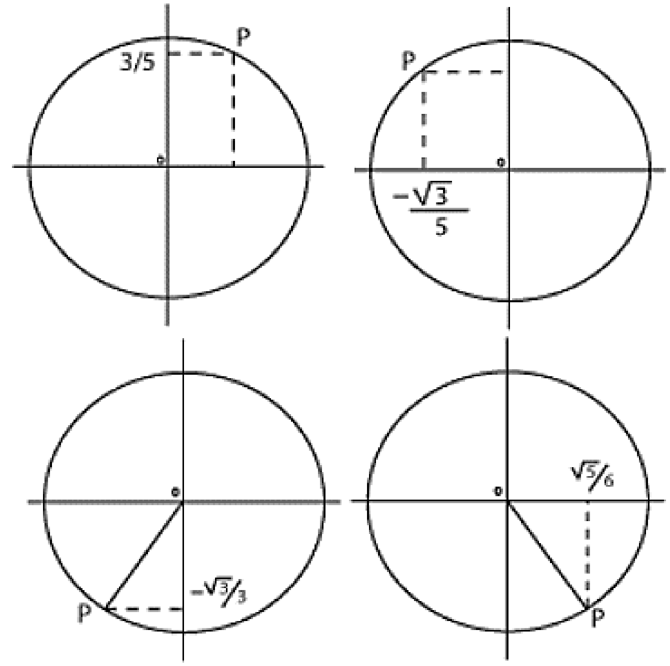
$$\csc\ a = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OR}}{\mathbf{r}} = \frac{\overline{OR}}{1} = \overline{OR}$$

En cada uno de los otros cuadrantes, la representación se obtiene de una manera análoga.

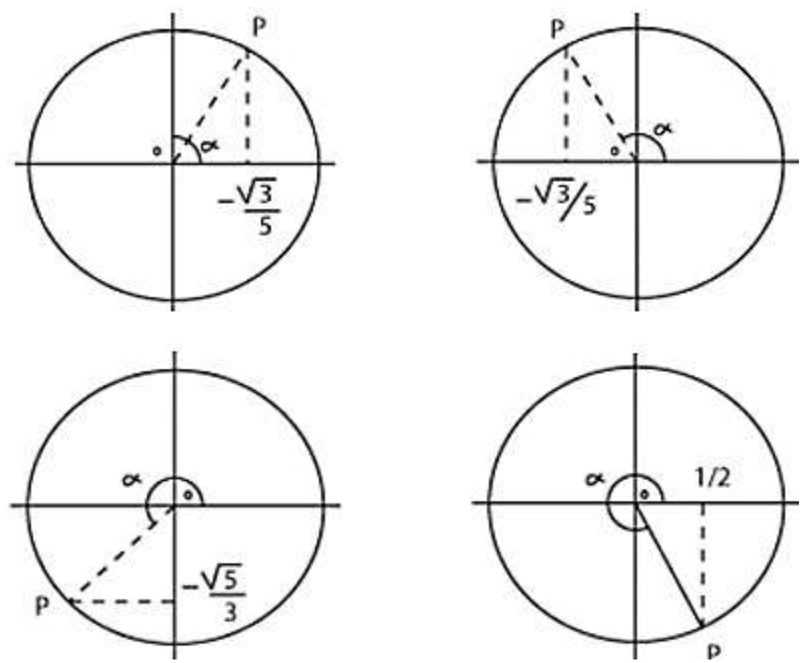
REFERENTE OPERACIONAL (SABER HACER)

Asegúrese de realizar los procedimientos correspondientes para cada uno de los ejercicios planteado, de acuerdo con los ejemplos usados en el referente teórico.

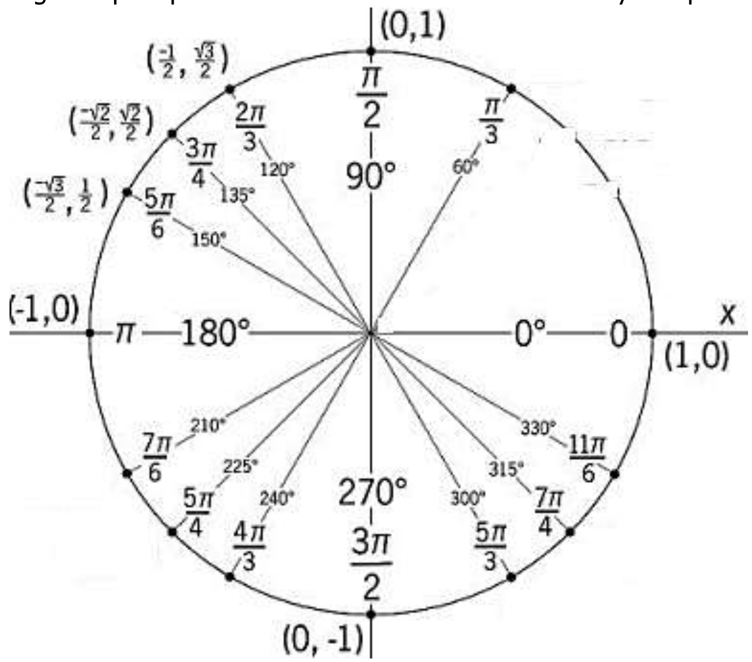
1. En las siguientes figuras el punto P(a, b) se encuentran sobre una circunferencia de radio unitario. Si se conoce la abscisa o la ordenada, determine las coordenadas de P:



2. En las siguientes figuras el punto P se encuentra sobre la circunferencia de radio r =1, si conoce una de las coordenadas de P determine sen α, cos α y tag α.



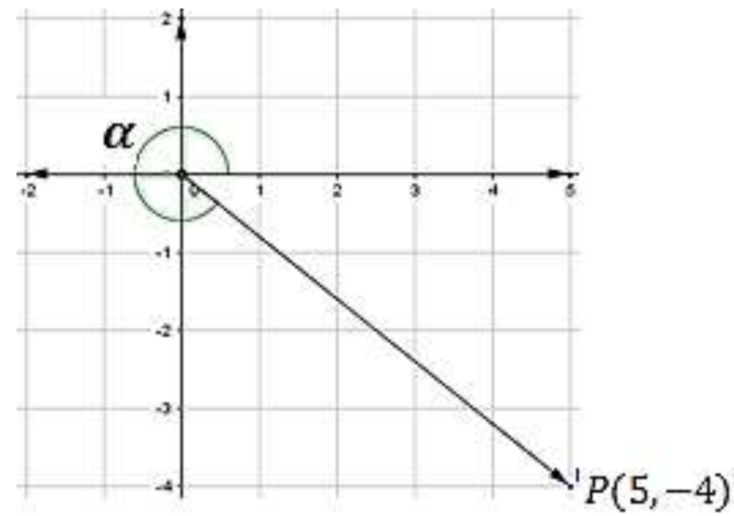
3. Observa los ángulos que aparecen trazados en la circunferencia y completa la tabla:



β	(x,y)	sen β	cos β	tan β	cot β	sec β	csc β
$\frac{2\pi}{3}$			$\left(\frac{-1}{2}\right)$				
$\frac{3\pi}{4}$							$\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{6}$				$-\frac{1}{\sqrt{3}}$			
$\frac{5\pi}{4}$	$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$						
$\frac{5\pi}{3}$		$-\sqrt{3}$					
$\frac{3\pi}{2}$						∞	

4. Encuentra el valor de cada una de las seis razones trigonométricas, si el punto $\boldsymbol{P(5,-4)}$ pertenece al lado terminal del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ como se muestra en la figura siguiente.

Usa la razón inversa $\boldsymbol{sen^{-1}}$ para determinar la medida del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$.

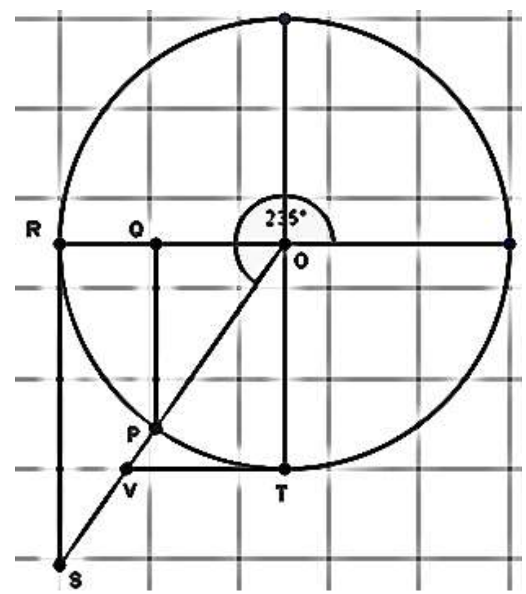


EVALUACIÓN (SABER SABER)

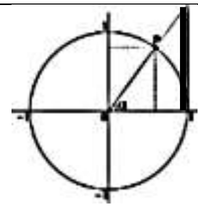
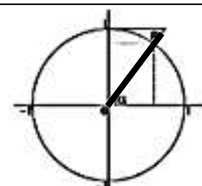
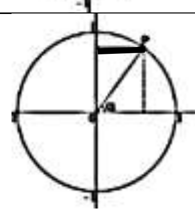
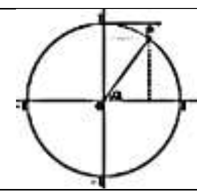
Asegúrese de realizar los procedimientos correspondientes para cada uno de los ejercicios planteados, de acuerdo con los ejemplos usados en el referente teórico.

5. Determina que segmento de recta coincide con cada función trigonométrica para el ángulo de 235°.

Función	Segmento de recta
Sen (235°)	$\overline{PQ}$
Cos (235°)	
Tan (235°)	
Cot (235°)	
Sec (235°)	
Csc (235°)	

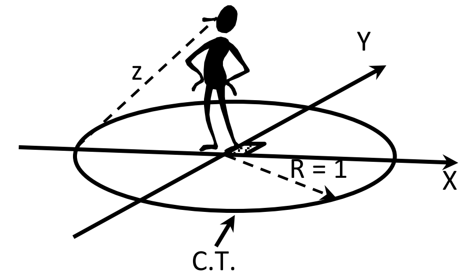


6. En este ejercicio debe formar las parejas correspondientes. Estas parejas tienen que ver con las razones trigonométricas y su correspondiente definición en la circunferencia unitaria y su correspondiente línea trigonométrica.

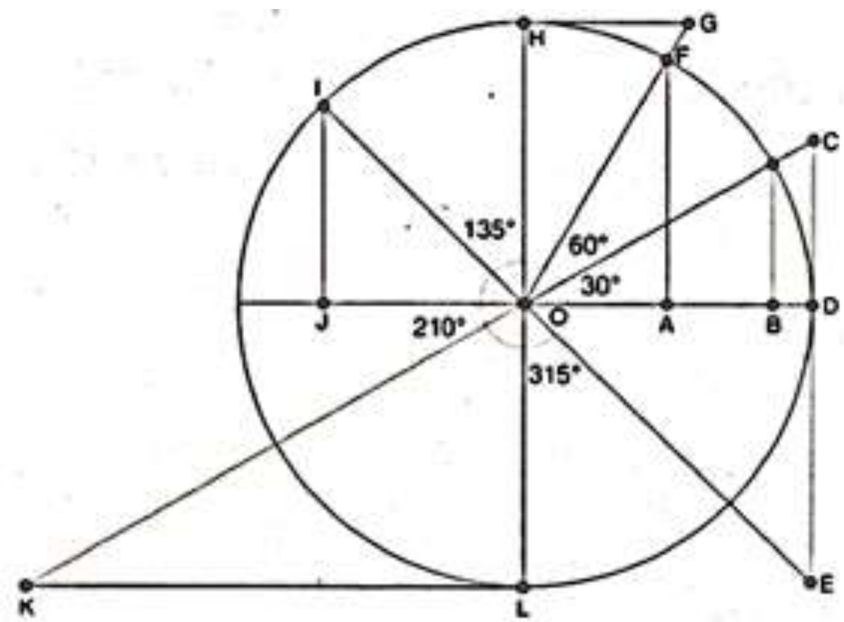
Línea trigonométrica 		En la circunferencia unitaria esta razón trigonométrica es igual a la segunda componente del punto. $?\ \alpha = y$
Dado un punto P(x,y) de la circunferencia unitaria, así está definida la razón trigonométrica: $\cot\alpha$ 		
Línea trigonométrica 		
Línea trigonométrica 		En la circunferencia unitaria esta razón trigonométrica es igual a la segunda componente del punto. $?\ \alpha = \frac{x}{y}$
Línea trigonométrica 		
Línea trigonométrica 		
Dado un punto P (x, y) de la circunferencia unitaria, así está definida la razón trigonométrica: $sen\ \alpha$ 		

7. Un alumno del colegio Trilce se encuentra parado sobre el centro de una circunferencia trigonométrica (C.T.) como se muestra en la figura. Hallar z, si el alumno mide aproximadamente $\sqrt{2}$ m.

a. $\sqrt{3}$ m
b. $\sqrt{5}$
c. 3
d. 3,5
e. $2\sqrt{2}$



8. Determina el valor de verdad para los siguientes enunciados.



a) Los segmentos OA y OB corresponden al coseno de 60° y 30°. ( )
b) Los segmentos OC y OE corresponden al coseno de 135° y 210°. ( )
c) Los segmentos OA y OB corresponden al coseno de 60° y 30°. ( )
d) En la figura el segmento DE es tangente de 135° y 315°. ( )

Referencias:

Santillana. Los Caminos del Saber. Matemáticas 10 Equipo Editorial SM.
Matemáticas LAROUSSE 10º.
Min educación.

1. PUNTOS DE LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

https://www.youtube.com/watch?v=2XmvjizntV0

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA (circunferencia unitaria)
https://www.youtube.com/watch?v=5XhUUJCcafA

3. GRAFICA DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN GEOGEBRA
https://www.geogebra.org/m/abEetC3E

REFLEXIÓN:

Colorea de verde, naranja o rojo, de acuerdo a tu experiencia con este taller: